**6.-** Enpresa batek bi produktu ($P_1$ eta $P_2$) egiten ditu bi lantegietan ($L_A$ eta $L_B$). $P_1$-en unitate bakoitza ekoizten $L_A$ lantegiaren 2 ordu erabiltzen ditu, eta 8 ordu $L_B$ lantegian. $P_2$-ren unitate bakoitzak $L_A$-n 3 ordu behar ditu eta $L_B$-n, 6. $L_A$ lantegiak hilabeteko 1.200 ordutako ahalmena du, eta $L_B$ lantegiak, 3.000 ordutakoa. $P_1$-en hilabeteko eskaria ez da 300 unitatekoa baino handiagoa eta $P_2$-rena ez da 350 unitatekoa baino handiagoa. $P_1$ eta $P_2$-ren mozkin unitarioak 7 m.u. eta 2 m.u.koak badira, hurrenez hurren:

**a)** Mozkina maximizatzen duen produktuen konbinazioa aurkitu.

**b)** $P_1$ produktuaren eskaria hileko unitate batean handituko balitz, eta $P_1$-en unitate gehigarri bat ekoizteko kostua 3 m.u.koa bada, enpresari interesatuko al zaio eskariaren gehikuntza betetzea? Baldintza horiek $P_2$-rentzat gertatzen badira, zer egingo du enpresak)

10) Enpresa batek egiten duen artikuluaren ekoizpen funtzioa $Q = 10x_1 \cdot x_2 - 5x_1^2 - x_2^2$ da. $x_1$ eta $x_2$ izanik artikulu hori egiteko behar diren bi faktoretan kontsumitutako kopuruak. Faktoreen prezio unitarioak $p_1 = 10$ eta $p_2 = 2$ dira (euroak). Ondokoak kalkulatu:

a) 16.000 € erabiliz ekoiztu daitekeen kopuru maximoa. Nola eragiten du ekoizpen horretan euro 1 gehiago erabili ahal izateak?

b) 160.000 unitate ekoizteko kostu minimoa. Output unitate bakoitzak sortzen duen mozkina $\frac{1}{300}$ €koa bada, ekoizpena handitzea errentagarria da?

**4)** Lagrangeren metodoaz, hiru aldagaiko $U = x^2 + y^2 + z^2$ funtzioaren hoberenak lortu, ondokoari lotuta: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 9$

**1)** Hurrengo forma koadratikoak sailkatu:

**d)** $Q:\Re^3 \to \Re$ , non: $Q(x_1, x_2, x_3) = -3x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3$

4) Hurrengo funtzioen ganbiltasun ahurtasuna aztertu, zehazten diren puntuetan edo bere izate-eremu osoan:

**c)** $f(x, y) = x + y - e^{x} - e^{x+y}$

**8.-** Ibaetako tailer batean hiru motako txirrinduak prestatzen dituzte, hirikoak, mendikoak eta karreratakoak. Bakoitzaren mozkina 15, 20, eta 24 €koak dira, hurrenez hurren. Bi prozesu daude: koadroa muntatu (A) eta osagai guztiak doitu (B). Txirrindu mota bakoitzak honako beharrak ditu, lanordutan:

| | Hirikoa | Mendikoa | Karreratakoa |
|---|---|---|---|
| A | 3 | 1 | 3 |
| B | 1 | 5 | 2 |

Koadroak muntatzeko 120 ordu erabilgarri daude, eta osagaiak doitzeko, 60 ordu.

a) Mozkinak maximizatzeko txirrindu mota bakoitzetik prestatu beharreko unitateak kalkulatu.

b) Aztertu mozkinetan gertatzen den aldaketa, A prozesuan 121 lanordu erabilgarri izatera pasatzen bada.

6) Monopolio-lehia batean. ekoizleek beren mozkinak maximizatuko dituen prezio maila zehaztu behar dute. Demagun ekoizle batek bi marka eskaintzen dituela, beren eskari-funtzioak hauexek izanik: $\begin{cases} Q_1 = 14 - 0,25p_1 \\ Q_2 = 24 - 0,5p_2 \end{cases}$ eta kostu funtzio bateratua honakoa dela: $C = Q_1^2 + 5Q_1 \cdot Q_2 + Q_2^2$ . Zehaztu:

a) mozkinak maximizatuko dituen ekoizpen maila
b) marka bakoitza saldu beharko den prezioa
c) mozkin maximoa

**12)** Diputazioak zerbitzugune bat eraiki behar du auto gidarientzat. Bere azalera laukizuzena izango da, 5.000 $m^2$ edukiko ditu eta errepidera jotzen ez duten hiru alboetan hesi bat jarriko da. Zein da hesiaren luzera minimoa?

**a)** Metodo geometrikoaz ebatzi

**b)** Lagrange-ren metodoaz ebatzi

**c)** Hesiaren metro bakoitzak 50 € balio badu, zenbatean aldatuko da kostua zerbitzugunearen azalera metro karratu bat handitzen bada?

5.- Baserri bateko oilaskoek egunean, gutxienez, 24 burdin-unitate eta 8 bitamina-unitate jan behar dituzte. Arto zakuak 2 burdin-unitate eta 5 bitamina-u. ematen ditu, hezur-irin zakuak 4 burdin-u. eta bitamina-u. 1, eta pentsu zakuak 2 burdin-u. eta bitamina-u. 1. Zaku bakoitzaren kostua 40, 20 eta 60 € bada hurrenez hurren,

**a)** zein da kostua minimizatzen duen elikagai nahasketa?

**b)** Dualaren bidez ebatzi, eta dualaren esanahi ekonomikoa aztertu.

**1)** Hurrengo forma koadratikoak sailkatu:

**b)** $Q : \Re^2 \to \Re$, non: $Q(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 6x_2^2 + 8x_1x_2$

4) Hurrengo funtzioen ganbiltasun/ahurtasuna aztertu, zehazten diren puntuetan edo bere izate-eremu osoan:

**c)** $f(x, y) = x + y - e^{x} - e^{x+y}$

5) Aldi batean herrialde baten inbertsio garbia ($I$), interes tasaren ($i$) eta errenta mailaren ($Y$) araberakoa da, honako erlazioaren bitartez: $I = 50 + 8i - 40i^2 + 0{,}6Y - 0{,}03Y^2$. Aldi horretan inbertsio maximoa erdietsiko luketen aldagaien balioa aztertu. Zein izango da balio maximo hori?

7) Pentsu-fabrika batek, bere eskualdean lorturiko arrakasta dela bide, lurralde osora hedatzea erabaki du. *A* eta *B* produktuak ekoiztuko ditu, beren unitate bakoitzeko salmenta-prezioak $p_A = 42$ eta $p_B = 51$ direlarik. *A* produktuaren $q_A$ tonaren eta *B* produktuaren $q_B$ tonaren ekoizpenetik eratorritako kostuen funtzioa, eredu honen bitartez definitzen da:

$$C = 5q_A^2 + 3q_A \cdot q_B + 2q_B^2$$

Herrialdeko abeltzainek eskatu beharreko kantitateak zehaztu, eragiketaren mozkinak maximiza daitezen.

3) Hoberenatu $y = \ln\left(\frac{1}{x_1 \cdot x_2}\right) = -\ln(x_1 \cdot x_2)$

ondokoari lotuta: $x_1 + 5x_5 = 5$

a) Adierazpen grafikoan oinarrituz ebatzi (metodo geometrikoa)

b) Aldagaien ordezkapen metodoaz ebatzi

c) Lagrangeren biderkatzaileen metodoaz ebatzi

6) Empresa batek bi ondasun ekoizten ditu, $X$ eta $Y$, hauen prezio unitarioak $p_x = 30$ eta $p_y = 50$ izanik. Kostu totalen funtzioa hau da: $K(x, y) = \frac{x^2}{2} - x + x \cdot y + y^2 - 4y + 40$, ondasun bakoitzetik $x$ eta $y$ unitate fabrikatzen direnean.

a) Mozkina maximotzeko ekoizpen hoberena kalkulatu

b) Guztira 30 unitate ekoizten badira, zein da lortu daitekeen mozkin maximoa?

c) Unitate gehigarri bat ekoizteko 2 moneta-unitate inbertitu behar dira. Inbertsio hau errentagarria ote den adierazi, ariketa osoa berriro ebatzi gabe.

4.- Enpresa batek bi ondasun ekoizten ditu, I eta II. Bi lantegi ditu, eta bakoitzean ordubeteko ekoizpena taula honetan agertzen da (unitateak/ordua):

| | 1. lantegia | 2. lantegia |
|---|---|---|
| I ondasuna | 10 | 20 |
| II ondasuna | 25 | 25 |

Enpresak jaso duen eskari baten arabera, I ondasuneko 300 unitate egin behar ditu, eta II ondasuneko 500. Lehen lantegian ekoizpen ordu batek 10.000 €ko kostua du, eta bigarren lantegiko ordu baten kostua 8.000 €koa da. Zein da mozkinak minimizatzeko ekoizpen konbinazio egokiena?

3) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 2 = 0$ ekuazioaren bitartez era inplizituan definitzen den $z = F(x, y)$ funtzioaren hoberen lokalak erdietsi ($z$-ren balio positiboentzat).

6.- Enpresa batek bi produktu ($P_1$ eta $P_2$) egiten ditu bi lantegietan ($L_A$ eta $L_B$). $P_1$-en unitate bakoitza ekoizten $L_A$ lantegiaren 2 ordu erabiltzen ditu, eta 8 ordu $L_B$ lantegian. $P_2$-ren unitate bakoitzak $L_A$-n 3 ordu behar ditu eta $L_B$-n, 6. $L_A$ lantegiak hilabeteko 1.200 ordutako ahalmena du, eta $L_B$ lantegiak, 3.000 ordutakoa. $P_1$-en hilabeteko eskaria ez da 300 unitatekoa baino handiagoa eta $P_2$-rena ez da 350 unitatekoa baino handiagoa. $P_1$ eta $P_2$-ren mozkin unitarioak 7 m.u. eta 2 m.u.koak badira, hurrenez hurren:

a) Mozkina maximizatzen duen produktuen konbinazioa aurkitu.

b) $P_1$ produktuaren eskaria hileko unitate batean handituko balitz, eta $P_1$-en unitate gehigarri bat ekoizteko kostua 3 m.u.koa bada, enpresari interesatuko al zaio eskariaren gehikuntza betetzea? Baldintza horiek $P_2$-rentzat gertatzen badira, zer egingo du enpresak)